

## PREDIKSI GERAK *HEAVE* DAN *PITCH* KAPAL FERI DI GELOMBANG *NONLINEAR* MENGGUNAKAN *A COUPLED EULERIAN SCHEME WITH LAGRANGIAN PARTICLE*

Suandar Baso, Syamsul Asri & Rosmani

Jurusan Teknik Perkapalan - Fakultas Teknik, Universitas Hasanuddin,  
Jl. Perintis Kemerdekaan Km. 10 Tamalanrea - Makassar, Sulsel 90245  
Telp. 0411-585637, email: [andar\\_baso@yahoo.co.id](mailto:andar_baso@yahoo.co.id).

### Abstrak

Prediksi gerak kapal di atas gelombang nonlinear menjadi perhatian mendalam saat ini. Sehingga banyak peneliti berupaya keras membuat metode baru dan atau mengembangkan suatu metode yang lebih akurat dan tepat. Oleh karena itu, pada penelitian ini kami mengembangkan suatu metode *a coupled Eulerian Scheme with Lagrangian Particle* dan mengaplikasikan pada berbagai jenis kapal. Pengembangan metode ini akan diaplikasikan untuk memprediksi gerak *heave* dan *pitch* kapal Feri penyeberangan di gelombang nonlinear. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa perbandingan *time history* dari elevasi gelombang hasil numerik dengan teori cukup stabil pada *numerical wave tank*. Selanjutnya, maksimum nilai *volume error*  $|7,6 \times 10^{-2}| \%$  dan rata-rata  $|7,31 \times 10^{-3}| \%$ , ini menunjukkan bahwa *numerical wave tank* stabil dan dapat mengkonservasi volume air sangat baik. Tendensi dan konsistensi hasil numerik sama dengan hasil dari *Strip theory*. Hasil gerak *heave* hasil numerik untuk  $Hw/L=0,02$  dan  $0,75$  pada  $\lambda/L < 0,5$  tidak terlalu signifikan berbeda dibandingkan dengan hasil *Strip theory*, namun pada kondisi  $\lambda/L \geq 0,5$  menunjukkan nondimensional *heave* untuk  $Hw/L = 0,02$  lebih kecil daripada  $Hw/L = 0,75$ . Nondimensional gerak *pitch*  $Hw/L = 0,02$  dan  $0,75$  di sepanjang  $\lambda/L$  menunjukkan hasil numerik lebih besar dibandingkan dengan hasil *strip theory*. Selain itu pula, nilai nondimensional gerak *pitch* untuk  $Hw/L = 0,02$  lebih kecil dari nilai  $Hw/L = 0,75$ .

### Kata Kunci

Gerak kapal, gelombang nonlinear, simulasi numerik.

## PENDAHULUAN

Performa gerak kapal haruslah baik untuk menjamin keselamatan kapal di lautan. Keakuratan prediksi gerak kapal merupakan kebutuhan yang sangat penting untuk pendesainan dan pengoperasian kapal. Oleh karena itu, karakteristik performa gerak kapal haruslah diprediksi dengan tepat termasuk pada saat kapal di gelombang.

Studi gerak kapal diawali oleh Froude (1861) dan Kriloff (1896) kemudian studi tentang gerak *pitch* dan *heave* sebuah kapal. Selanjutnya, Lewis (1929) berasumsi bahwa kapal seperti bentuk *slender* sehingga menggunakan pendekatan teori *strip* untuk mendapatkan gaya-gaya hidrodinamika kapal. Hingga saat ini, banyak studi tentang gerak kapal di gelombang yang telah dikembangkan tidak mempertimbangkan efek nonlinear dari suatu aliran-aliran permukaan air seperti *wave breaking* dan *water on deck*. Sementara, efek-efek nonlinear yang diderita oleh sebuah kapal saat bergerak di atas gelombang sangat signifikan pengaruhnya. Selain itu, metode simulasi numerik gerak kapal yang mempertimbangkan pengaruh *wave breaking* dan *water on deck* sangat minim.

## Prediksi Gerak *Heave* dan *Pitch* Kapal Feri di Gelombang *Nonlinear* menggunakan *a Coupled Eulerian Scheme with Lagrangian Particle*

Beberapa tahun yang lalu, perkembangan teknik-teknik komputasi sangat cepat untuk menyelesaikan persoalan-persoalan efek nonlinear dari suatu aliran-aliran permukaan air seperti, *Particle Level Set method* (Enright, 2022), *Lagrangian Particle Level Set method* (Hieber, 2005), *CLSVOF method* (Sussman, 1998) dan *PLIC-VOF method* (Lopez, 2005). Namun, masih terdapat kerumitan pada permukaan aliran yang direpresentasikan oleh partikel.

Dari beberapa penjelasan di atas, metode *Eulerian scheme* dengan *Lagrangian particles* dapat digunakan untuk memprediksi dan menginvestigasi gerak kapal di atas gelombang dengan mempertimbangkan efek-efek *wave breaking* dan *water on deck*. Metode ini menggunakan dua jenis partikel yakni *Smoothed Hydrodynamic Particle* (SPH) dan partikel permukaan air pada *Eulerian grid*. Aplikasi untuk memprediksi gerak *heaving* dan *pitching* pada kapal Tanker dan kapal Feri cepat telah dilakukan dan pada studi ini aplikasi selanjutnya yakni pada kapal Feri angkutan penyeberangan. Hal ini dilakukan agar metode ini dapat diaplikasikan pada semua jenis kapal.

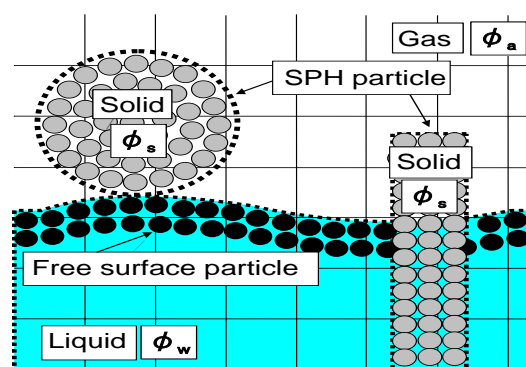
### Metode Numerik

Pada bagian ini, metode yang digunakan pada penelitian ini sebagaimana telah dijelaskan sekilas di bagian pendahuluan yakni kombinasi antara *Eulerian grid* dan *Lagrange particle*. Metode tersebut mempunyai dua jenis partikel *Lagrangian* pada *Eulerian grid*. Kedua partikel ditempatkan dan ditampilkan dengan tingkat akurasi yang tinggi.

### Skema Eulerian Dengan Partikel Lagrangian

#### *Partikel Lagrangian*

Skema dari model yang akan digunakan diilustrasikan pada gambar (1). Dimana partikel *Lagrangian* yakni partikel SPH ditandai dengan bulatan-bulatan abu-abu dan permukaan air dengan tanda bulatan-bulatan hitam yang memiliki property fisik yakni densitas dan kecepatan. Badan kapal direpresentasikan oleh partikel SPH, dimana mengkarakan densitas kapal dan radius yang digunakan untuk mengkomputasi gerak kapal.



**Gambar 1.**  
Skema model.

Partikel permukaan air mempunyai fungsi densitas  $\phi_p$  untuk mengkarakan properti fisik setiap fase fluida. Sementara fungsi densitas  $\phi_l$  didefinisikan pada pertemuan garis pada

*grid* yang mempunyai peran penting dalam membuat alur pemisah antara beda fase seperti udara, air dan padat.

### Lokasi dan Kebutuhan Waktu Partikel Lagrangian

Lokasi partikel pada permukaan air diintegrasikan menggunakan *evolution of the fourth order accurate Runge-Kutta method*, berikut persamaannya:

$$\frac{d\bar{x}_p}{dt} = \bar{u}(\bar{x}_p) \quad (1)$$

dimana  $\bar{x}_p$  merupakan lokasi partikel, dan  $\bar{u}(\bar{x}_p)$  kecepatan partikel.

### Interpolasi Nilai Fisik pada Partikel dan Grid

Komponen kecepatan didefinisikan pada sel permukaan dari *grid*. Kemudian tekanan di semua fase fluida didefinisikan di tengah dari sebuah *grid*. Sehingga, kecepatan dari partikel permukaan air diinterpolasi dari kecepatan pada permukaan *grid* sebelumnya. Salah satu contoh untuk penyelesaian tiga dimensi, interpolasi nilai fisik  $f_s$  partikel di permukaan air dapat diselesaikan dengan persamaan matriks berikut:

$$f_s = a_0 + a_1x_g + a_2y_g + a_3z_g$$

$$\begin{pmatrix} 8 & \Sigma x_g & \Sigma y_g & \Sigma z_g \\ \Sigma x_g & \Sigma x_g^2 & \Sigma x_g y_g & \Sigma x_g z_g \\ \Sigma y_g & \Sigma y_g x_g & \Sigma y_g^2 & \Sigma y_g z_g \\ \Sigma z_g & \Sigma z_g x_g & \Sigma z_g y_g & \Sigma z_g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma f_g \\ \Sigma f_g x_g \\ \Sigma f_g y_g \\ \Sigma f_g z_g \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dimana  $g$  merupakan *grid*, dan  $s$  merupakan partikel. Fungsi densitas  $\phi_I$  yakni  $I = 1$ : udara,  $I = 2$ : air,  $I = 3$ : kapal).

### Pendistribusian Partikel di Permukaan Air

Untuk memperjelas pemisah beda fase secara akurat pada pensimulasian lewat komputer, distribusi dari partikel permukaan air secara periodik dibutuhkan. Dengan menggunakan proses pendistribusian juga kestabilan dan efisiensi pensimulasian lewat komputer dapat ditingkatkan.

### Governing Equations untuk Fluida Multi-Fase

Pada method yang digunakan, *governing equations* pada fase fluida terdiri dari persamaan konservasi massa, persamaan *incompressible Navier-Stokes*, persamaan kontinuitas,  $I$ -fase *density function*  $\phi_I$  ( $0 \leq \phi_I \leq 1$ ) serta persamaan adveksi. Persamaan-persamaan tersebut diekspresikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i + \bar{F}_{fsi} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \phi_I}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

Dimana  $I$ -fase mengartikan fase udara ( $I = 1$ ), fase cair ( $I = 2$ ) dan fase padat ( $I = 3$ ),  $g_i$  merupakan gravitas,  $F_{fsi}$  merupakan interaksi fluida dan struktur, dan  $\tau_{ij}$  merupakan *SGS stress*. Untuk mengurangi parameter dari model *SGS stress* diselesaikan dengan menggunakan *Dynamic SGS (DSM)* diperkenalkan oleh Germano (1992).

Selain itu, fungsi densitas  $\phi_I$  digunakan untuk mengidentifikasi property fisik dari beda fase. Densitas dan viskositas dapat diturunkan dengan menggunakan fungsi densitas  $\phi_I$  sebagaimana diberikan pada persamaan berikut di bawah ini:

$$\rho = \sum_{I=1}^3 \rho_I \phi_I \quad (6)$$

$$\mu = \sum_{I=1}^3 \mu_I \phi_I \quad (7)$$

Fungsi densitas  $\phi_3$  (fase padat) dikoreksi dengan menggunakan persamaan partikel SPH yang didapatkan pada fase padat.

Persamaan-persamaan tersebut di atas kemudian diselesaikan dengan menggunakan *splitting method* yakni teknik *conventional multiphase*. Pada metode ini, *C-CUP method* sebagai *splitting method*. Selanjutnya, tekanan dengan *specified jump conditions* diselesaikan dengan menggunakan persamaan Poisson, diberikan sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla P^{n+1}}{\rho^*} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (8)$$

dimana  $*$  sebagai notasi nilai fisik setelah tahapan adveksi. Tekanan pada fase padat dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan ini pula dan dapat digunakan pula untuk menyelesaikan deformasi benda padat.

*Governing equations* untuk fase padat yang mana diskritkan dengan menggunakan metode SPH terdiri dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum, sebagai berikut:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0 \quad (9)$$

$$\rho \frac{Du^i}{Dt} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + g^i - F_{fsi}^i \quad (10)$$

dimana  $\rho$  merupakan densitas,  $u^i$  merupakan kecepatan,  $x^j$  posisi vektor dari vektor ke- $j$ ,  $\sigma^{ij}$  stress tensor fase padat dan  $F_{fsi}$  merupakan interaksi antara fluida dan struktur.

Interaksi antara fluida dan struktur  $F_{fsi}$  diselesaikan dengan akselerasi yang diperoleh dari tekanan pada partikel SPH terinterpolasi dengan menggunakan tekanan *grid*. Pada metode ini, Interaksi antara fluida dan struktur  $F_{fsi}$  tersebut pada persamaan (4) dan (10) dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$F_{fsi}(\mathbf{r}_a) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r}_a)} \sum_b m_b \frac{P(\mathbf{r}_b)}{\rho(\mathbf{r}_b)} \nabla_a W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) \quad (11)$$

### Gerak Kapal 3D

Pada metode ini, sebuah badan kapal berisikan partikel SPH. Partikel ini digunakan untuk memprediksi gerak kapal dengan deformasi kapal. Oleh karena itu, tiga dimensi (3D) dari badan kapal, mempresentasikan dan menggambarkan gerakan translasi dan rotasi di titik berat kapal, dan dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\frac{\partial^2 x_{s,k}}{\partial t^2} = \frac{F_{s,k}}{m_i} - F_{fsi} \quad (12)$$

$$I \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = T_i \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i \quad (14)$$

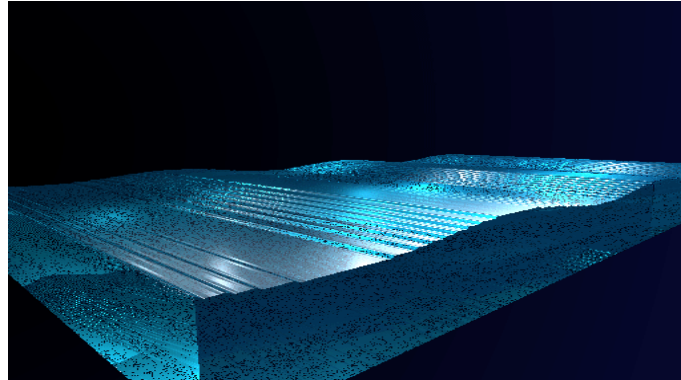
dimana  $\theta_i$  rotational angle,  $\omega_i$  angular velocity,  $T_i$  torque,  $I$  the inertia moment, and  $F_{fsi}$  fluid structure interaction. Selanjutnya, titik berat kapal diperoleh dengan menyelesaikan momen inersia partikel SPH, dan dihitung dengan menggunakan *Baraff Theory* (1997).

### Pemodelan Numerical Wave Tank

Pada tahapan ini pemodelan *numerical wave tank* telah dilakukan. Selanjutnya akan diuji dan diverifikasi dengan kestabilan volume air dan bangkitan gelombang dengan teori yang ada sebelum digunakan dalam mensimulasi kapal Feri di *Heading wave*.

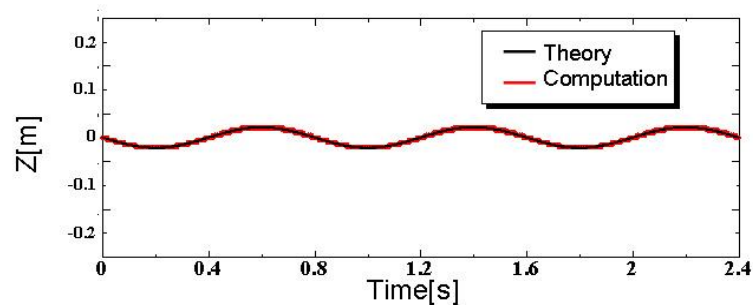
## Prediksi Gerak *Heave* dan *Pitch* Kapal Feri di Gelombang *Nonlinear* menggunakan *a Coupled Eulerian Scheme with Lagrangian Particle*

Gambar 2 memperlihatkan bangkitan gelombang regular pada *numerical wave tank*. Pada *numerical wave tank* terlihat tinggi gelombang 5cm dan periode gelombang 0,8 detik yang telah di-input pada kondisi awal.

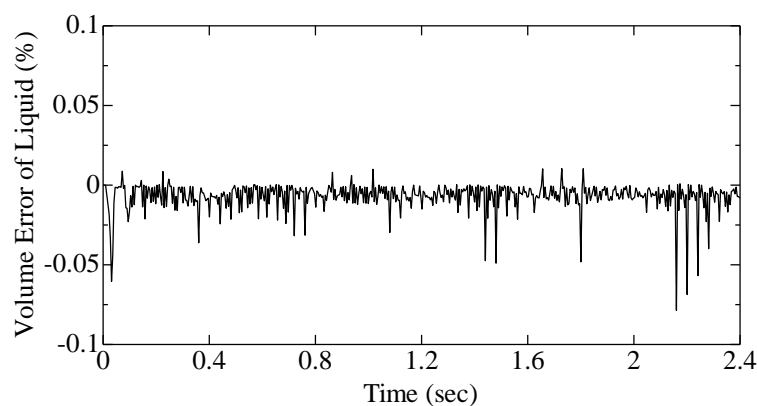


**Gambar 2.**  
Bangkitan gelombang pada *numerical wave tank*.

Perbandingan *time history* elevasi gelombang hasil numerik dengan teori dapat dilihat pada Gambar 3 elevasi gelombang diambil pada bagian tengah dari *numerical wave tank* dimana hasil informasi didapatkan dari partikel Lagrangian. Dari gambar tersebut terlihat bahwa bangkitan gelombang cukup stabil.



**Gambar 3.**  
Perbandingan elevasi gelombang antara hasil numerik dengan teori.



**Gambar 4.**  
*Time history volume error* dari air.

Pada gambar 4 memperlihatkan *volume error* dari air yang di *numerical wave tank*. Pada sumbu vertikal merupakan besaran persen perubahan *volume error* air pada kondisi awal. Kemudian, maksimum nilai *volume error*  $|7,6 \times 10^{-2}| \%$  dan rata-rata  $|7,31 \times 10^{-3}| \%$ , ini menunjukkan bahwa *numerical wave tank* juga stabil dan dapat mengkonservasi volume air sangat baik.

### **Aplikasi pada Kapal Feri Penyeberangan**

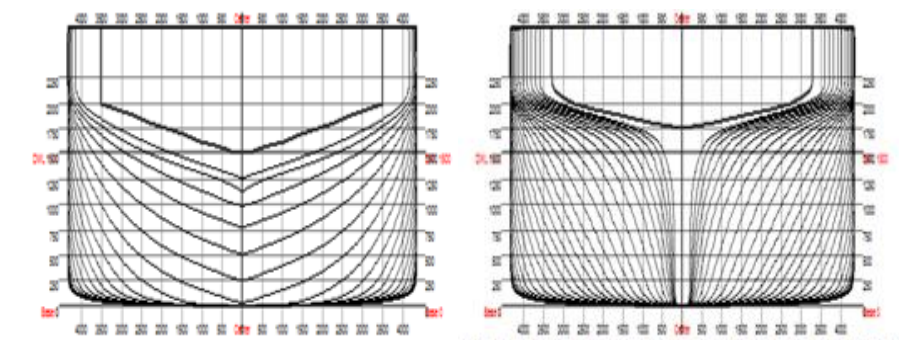
Pada bagian ini, banyak gerak *heave* dan *pitch* yang dipertimbangkan untuk disimulasi. Ukuran utama kapal Feri telah disajikan pada Tabel 1. Gambar 5 menampilkan *body lines* dan Gambar 6 *mesh* badan kapal Feri. Pada badan kapal tersebut akan disusun sejumlah *smoothed particle hydrodynamics*, metode SPH.

Pada kondisi awal komputasi, ukuran grid yang digunakan  $0,0025 \sim 0,015 L_{bp}$  dan radius dari partikel air di permukaan adalah  $0,00125 \sim 0,005 L_{bp}$ . Jumlah partikel air yang dilokasikan di sekitar permukaan bebas air adalah 600,000. Namun, jumlah maksimum dapat digunakan yakni sekitar 1 (satu) juta partikel. Radius dari SPH partikel yang tersusun sebagai badan kapal digunakan  $0,00125 L_{bp}$  dan jumlah partikelnya yakni 180.000.

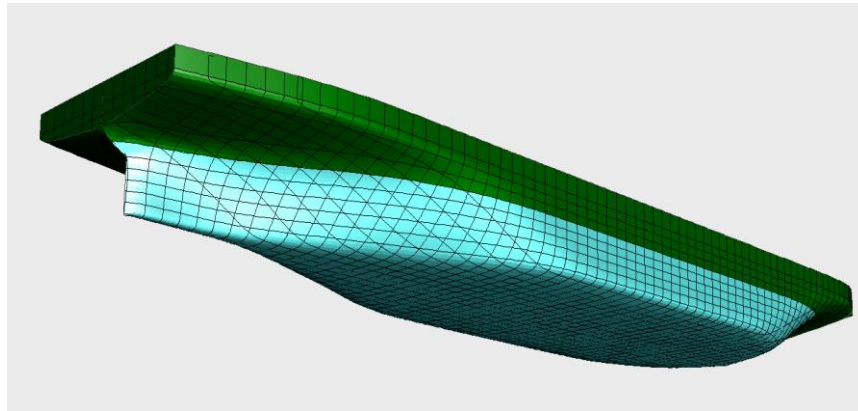
Gerak kapal disimulasi dengan *Froude number*  $Fn$  0,174 dan 0,286. *Froude number*  $Fn$  0,174 merupakan kondisi aktual pelayaran dan satunya merupakan kondisi kecepatan maksimum atau pelayaran. Tabel 2 menyajikan kondisi gelombang yang digunakan pada simulasi. Dimana tinggi gelombang 1m sampai dengan 4m.

**Tabel 1.**  
Ukuran utama KMP. Bontoharu.

No.	Item	Ukuran
1.	<i>Length between perpendiculars</i> (Lbp)	54 m
2.	<i>Width</i> (B)	14 m
3.	<i>Draft</i> (T)	2,5 m
4.	<i>Height</i> (H)	3,5 m
5.	<i>Speed</i> (V)	12 knot



**Gambar 5.**  
*Body lines* kapal feri.



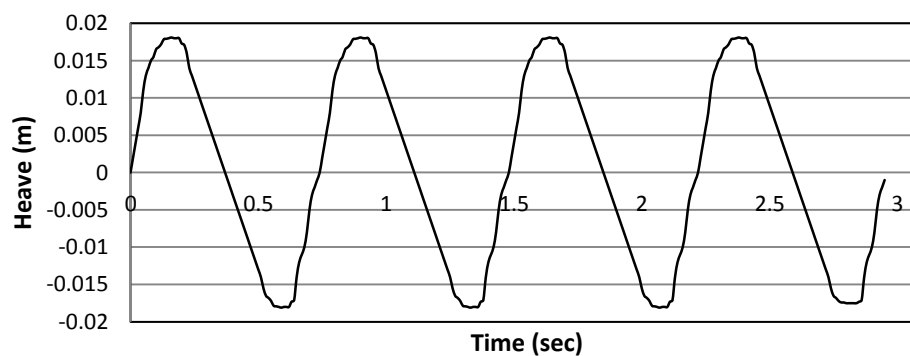
**Gambar 6.**  
*Mesh* badan kapal feri.

**Tabel 2.**  
 Kondisi gelombang pada simulasi numerik.

$H_w/L_{bp}$	0,02 s/d 0,075
$\lambda/L_{bp}$	0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,5 dan 2,0

Aplikasi pada gerak kapal Feri di gelombang telah disimulasi secara numerik. Hasil simulasi numerik akan dibandingkan dengan *strip theory* pada penjelasan berikut.

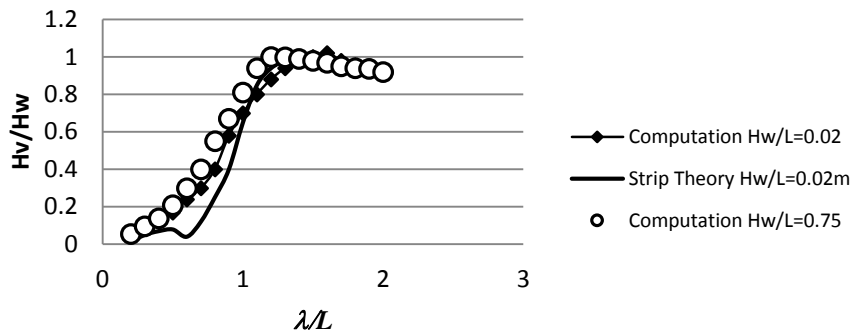
Gambar 7 menampilkan salah satu contoh *time history* gerak *heave* kapal Feri untuk kasus  $F_n=0,45$ ,  $\lambda/L=1,0$  dan  $H_w/L_{bp}=0,75$ . Hasil dari *time history* tersebut memperlihatkan bahwa kurva gerak *heave* cukup stabil.



**Gambar 7.**  
*Time history* gerak *heave* ( $F_n=0,45$ ,  $\lambda/L=0,8$  dan  $H_w/L_{bp}=0,75$ ).

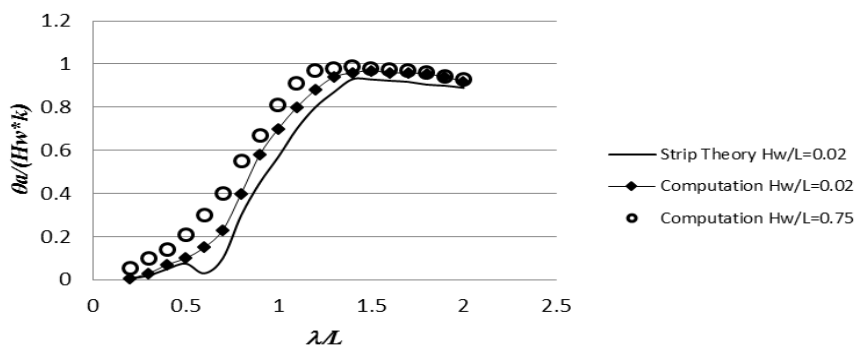
Gambar 8 menunjukkan perbandingan gerak nondimensional *heave* antara hasil numerik dengan hasil *strip theory*. Nilai nondimensional untuk gerak *heave* didapatkan dari  $H_v/H_w$ , dimana  $H_v$  adalah amplitude gerak *heave* dan  $H_w$  adalah tinggi gelombang. Pada  $\lambda/L < 0,5$  hasil numerik untuk  $H_w/L=0,02$  dan  $0,75$  tidak terlalu signifikan berbeda, namun hasil *strip theory* lebih kecil dari kedua hasil numerik yang disebutkan sebelumnya. Hasil

numerik pada  $\lambda/L \geq 0,5$  menunjukkan nondimensional *heave* untuk  $H_w/L=0,02$  lebih kecil daripada  $H_w/L=0,75$ , hal ini sangat beralasan karena semakin tinggi gelombang terhadap dimensi panjang gelombang dan panjang kapal yang tetap maka gerak *heave* akan meningkat pula. Dari gambar tersebut pula, nondimensional gerak *heave* pada ke dua tinggi gelombang mempunyai tendensi dan konsistensi yang sama dengan hasil *strip theory*.



**Gambar 8.**  
Perbandingan gerak *heave* antara hasil numerik dengan *strip theory*.

Gambar 9 menunjukkan perbandingan nondimensional gerak *pitch* antara hasil numerik dengan hasil *Strip theory*. Keseluruhan hasil numerik nondimensional gerak *pitch*  $H_w/L=0,02$  dan  $0,75$  di sepanjang  $\lambda/L$  menunjukkan nilai yang lebih besar dibandingkan dengan hasil *strip theory*. Selain itu pula, nilai nondimensional gerak *pitch* untuk  $H_w/L=0,02$  lebih kecil dari nilai  $H_w/L=0,75$ . Seperti halnya pada penjelasan sebelumnya, keseluruhan hasil numerik mempunyai tendensi dan konsistensi yang sama dengan hasil *strip theory*.



**Gambar 9.**  
Perbandingan gerak *pitch* antara hasil numerik dengan *strip theory*.

## SIMPULAN

- Maksimum nilai *volume error*  $|7,6 \times 10^{-2}| \%$  dan rata-rata  $|7,31 \times 10^{-3}| \%$ , ini menunjukkan bahwa *numerical wave tank* juga stabil dan dapat mengkonservasi volume air sangat baik pada saat proses komputasi.

## Prediksi Gerak *Heave* dan *Pitch* Kapal Feri di Gelombang *Nonlinear* menggunakan *a Coupled Eulerian Scheme with Lagrangian Particle*

---

- Tendensi dan konsistensi hasil numerik sama dengan hasil dari *strip theory*.
- Hasil gerak *heave* pada  $\lambda/L < 0,5$  hasil numerik untuk  $Hw/L=0,02$  dan  $0,75$  tidak terlalu signifikan berbeda dibandingkan dengan hasil *strip theory* 1. Pada kondisi  $\lambda/L \geq 0,5$  menunjukkan nondimensional *heave* untuk  $Hw/L= 0,02$  lebih kecil daripada  $Hw/L= 0,75$ .
- Nondimensional gerak *pitch*  $Hw/L=0,02$  dan  $0,75$  di sepanjang  $\lambda/L$  menunjukkan hasil numerik lebih besar dibandingkan dengan hasil *strip theory*. Selain itu pula, nilai nondimensional gerak *pitch* untuk  $Hw/L=0,02$  lebih kecil dari nilai  $Hw/L=0,75$ .

### Ucapan Terimakasih

Penelitian ini dibiayai oleh Lembaga Penelitian Universitas Hasanuddin dalam skema Penelitian Berbasis Program Studi. Oleh karena itu, kami mengucapkan banyak terima kasih.

### DAFTAR PUSTAKA

- Froude, W., (1861), *On the Rolling of Ships*, Inst. Nav. Archit., Trans.2, pp.180-229.
- Kriloff, A., (1896), *A New Theory of the Pitching Motion of Ships on Waves, and of The Stresses Produced by this Motion*", Inst. Nav. Archit., Trans. 37, pp.326-368.
- Lewis, F.M., (1929), *The Inertia of Water Surrounding a Vibrating Ship*, Soc. Nav. Archit. Mar. Eng., Trans. 37, pp.1-20.
- Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J., and Mitchell, I., (2002), *A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing*, J. Comp. Phys., Vol.183, pp.83-116.
- Hieber, S.E. and Koumoutsakos, P., (2005), *A Lagrangian Particle Level Set Method*, J Comp Phys, Vol 60(3), pp 391-436.
- Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. and Osher, S., 1998. *An Improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows*, Comput. and Fluid, 27, pp.663-680.
- Lopez, J., Hernandez, J., Gomez, P. and Faura, F., (2005), *An improved PLIC-VOF Method for Tracking Thin Fluid Structures in Incompressible Two-Phase Flows*, J. Comput. Phys., 208, pp.51-74, 2005.
- Germano, (1992), *Turbulence: the Filtering Approach*, Journal of Fluid Mechanics, vol.238, pp.325-336.
- Baraff, D., (1997), *An Introduction to Physically Based Modelling: Rigid Body Simulation I-Unconstrained Rigid Body Dynamics*, SIGGRAPH'97 course notes.